<u>Λήμμα</u>: Η καμπύλη $c(s)$, $s\in[a,b]$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι κυρτή αν-ν $\forall s_0, s\in[a,b]$:

$\langle c(s)-c(s_0), \bar{n}(s_0)\rangle \geq 0$ ή $\langle c(s)-c(s_0), \bar{n}(s_0)\rangle \leq 0$, $\forall s_0, s\in[a,b]$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $c(s)$, $s\in[a,b]$ είναι κυρτή καμπύλη τότε η καμπυλότητα διατηρεί πρόσημο δηλαδή $\forall s\in[a,b]$ $k(s)\geq 0$ ή $\forall s\in[a,b]$ $k(s)\leq 0$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $c(s)$ κυρτή

Θεωρώ την $f(s)=\langle c(s)-c(s_0), \bar{n}(s_0)\rangle$

$\Rightarrow f(s)\geq 0=f(s_0)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο s_0. Άρα από Θ. Fermat $\dot{f}(s_0)=0$, $\ddot{f}(s_0)\geq 0$

$\dot{f}(s)=\langle \dot{c}(s), \bar{n}(s_0)\rangle = \langle \bar{t}(s), \bar{n}(s_0)\rangle$

$\ddot{f}(s)=\langle \dot{\bar{t}}(s), \bar{n}(s_0)\rangle = \langle k(s)\bar{n}(s), \bar{n}(s_0)\rangle = k(s)\langle \bar{n}(s), \bar{n}(s_0)\rangle$

$\Rightarrow \ddot{f}(s_0)=k(s_0)\geq 0$

Σχόλιο: Το αντίστροφο δεν ισχύει

Μια καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλείται απλή, κλειστή αν-ν

(i) η c είναι περιοδική με περίοδο $L>0$

(ii) $c|_{[0,L)}$ είναι 1-1

<u>Θεώρημα</u> ("αντίστροφο" προηγούμενου με παραπάνω υποθέσεις)

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη της οποίας η καμπυλότητα διατηρεί πρόσημο είναι κυρτή.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη με περίοδο $L>0$ και καμπυλότητα $k(s) \geq 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$

$s_0 \in [0,L]$: $f(s) = \langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \geq 0$

Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο. Δηλαδή υπάρχουν s_1 και s_2: $f(s_1) < 0 = f(s_0) < f(s_2)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f(s_1) = \min f$, $f(s_2) = \max f$. Τότε $\dot{f}(s_1) = \dot{f}(s_2) = \dot{f}(s_0) = 0$

(Όμως $\dot{f}(s) = \langle \bar{t}(s), \bar{n}(s_0) \rangle$)

Άρα, $\bar{t}(s_1) = \pm \bar{t}(s_0)$ και $\bar{t}(s_2) = \pm \bar{t}(s_0)$.

Χωρίς βλάβη θεωρούμε $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \{s_1, s_2, s_0\}$

: $\bar{t}(t_1) = \bar{t}(t_2) \xrightarrow{\text{περιοδικότητα}} \bar{t}(t_1 + L) = \bar{t}(t_2)$

$K = \dfrac{d\varphi}{ds} \geq 0$, $\bar{t}(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s)))$

$\Rightarrow \varphi$ αύξουσα

$\bar{t}(t_1) = \bar{t}(t_2) \Rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = 2m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$

Αν $t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2) \Rightarrow m \geq 0$

$\bar{t}(t_1 + L) = \bar{t}(t_2) \Rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1 + L) = 2\ell\pi, \; \ell \in \mathbb{Z}$

όπως καιπάνω $\Rightarrow \ell \geq 0$

Όμως $n_c = 1$, $n_c = \dfrac{\varphi(L) - \varphi(0)}{2\pi} = 1$

$\Rightarrow \varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi = \varphi(t_1 + L) - \varphi(t_1)$

$= \varphi(t_2) - \varphi(t_1) + \varphi(t_1 + L) - \varphi(t_2)$

$= 2m\pi + 2\ell\pi$.

$\Rightarrow 2m\pi + 2\ell\pi = 2\pi \Rightarrow m + \ell = 1$. Αφού m, ℓ ακέραιοι άρα $m = 0$ ή $\ell = 0$

Για $m=0 \Rightarrow \varphi(t_1)=\varphi(t_2) \xRightarrow{\varphi \text{ αύξουσα}} \varphi|[t_1,t_2]=$ σταθερή

Τότε αφού φ σταθερή $\Rightarrow \frac{d\varphi}{ds}=k=0$. Άρα η καμπύλη είναι ευθεία τότε $f(s)=\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle$ μηδενίζεται στο 0. Άρα ένα από τα δυο ακρότατα θα είναι μηδέν όμως υποθέσαμε ότι το ελάχιστο είναι αρνητικό και το μέγιστο θετικό (Άτοπο) $\Rightarrow f$ διατηρεί πρόσημο

Ορισμός: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη (C^2) με παράμετρο το μήκος τόξου. Ο αριθμός s_0 (ή το σημείο $c(s_0)$) καλείται κορυφή της (αν-ν $\dot{k}(s_0)=0$ (δηλαδή οι κορυφές είναι τα κρίσιμα σημεία της καμπυλότητας)

Ορισμός στην τυχαία παράμετρο:

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$, $C^{(2)}$ κανονική καμπύλη

με παράμετρο t. Τότε $\dfrac{dk}{dt} = \dfrac{ds}{dt} \cdot \dfrac{dk}{ds} = \dfrac{ds}{dt}\dot{k}$

Τότε $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0$$

Άρα $\dfrac{dk}{dt} = 0 \iff \dot{k} = 0$. Στην πραγματικότητα

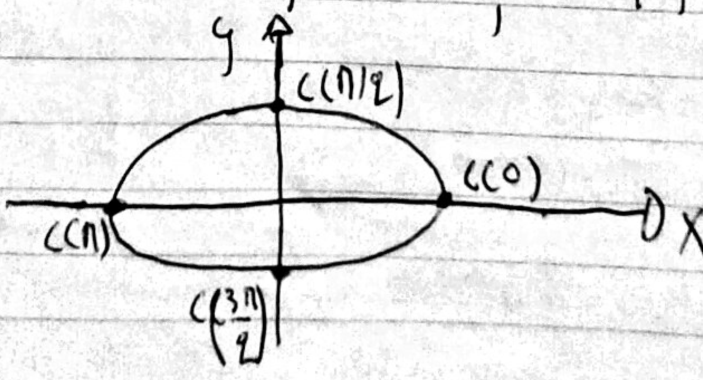
δηλαδή η υπόθεση για το μήκος τόξου

θα μπορούσε να παραλειφθεί.

Παράδειγμα: $c(t) = (a\cos t, a\sin t)$

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$k'(t) = 0 \iff t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$

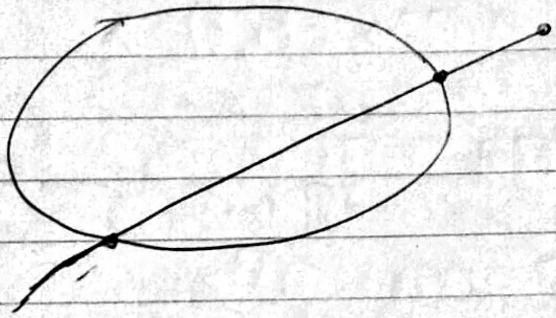


Άρα οι κορυφές της έλλειψης είναι 4

Θεώρημα 4 Κορυφών: Κάθε απλή, κλειστή, κυρτή καμπύλη έχει τουλάχιστον 4 κορυφές

Λήμμα: i) Έστω $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή, κλειστή, κυρτή καμπύλη. Αν μια ευθεία τέμνει την C σε τρία σημεία τότε ένα τμήμα της περιέχεται στην C.

Απόδειξη (Λήμματος):



Έστω ότι $K \geq 0$ παντού και η ευθεία ℓ τέμνει την C στα $C(0)$, $C(t_1)$, $C(t_2)$ $0 < t_1 < t_2$

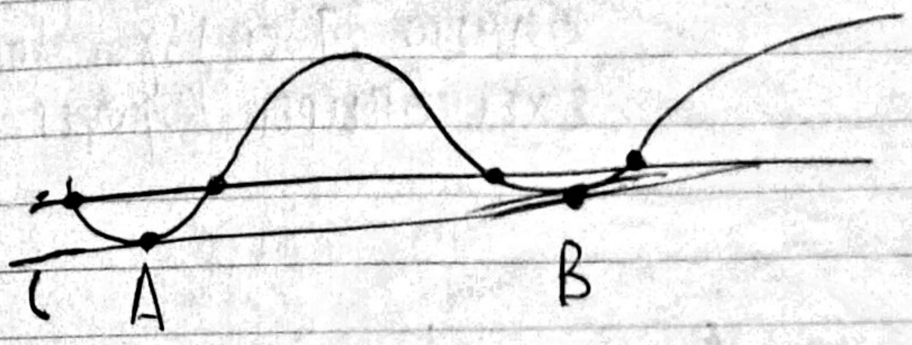
Έστω I ένα από τα διαστήματα. Τότε $C(\partial I) \subset \ell$

Θα δείξω ότι $C(I) \subset \ell$

Τότε $K = \frac{d\varphi}{ds} \geq 0 \Rightarrow \varphi$ αύξουσα, φ λαμβάνει τιμές σε κλειστό διάστημα $[\varphi_0, \varphi^*]$

$t(t_1) = t(t_2) \Rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = $ τιμ. $\xrightarrow{\varphi \text{ αύξ.}} \varphi|_{[t_1, t_2]} = $ σταθερή

ii) Αν μια ευθεία εφάπτεται της C σε δυο σημεία τότε ένα τμήμα της (καμπύλης) περιέχεται στην καμπύλη C



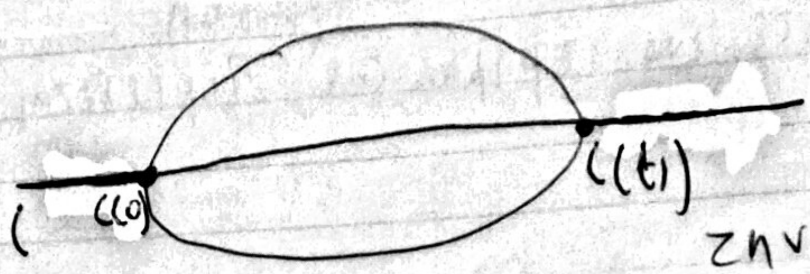
Απόδειξη (Θεωρήματος 4 κορυφών):

Έστω $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, απλή, κλειστή, κυρτή με περίοδο L. $C(s+L) = C(s) \Rightarrow \dot{C}(s+L) = \dot{C}(s)$

$\Rightarrow \bar{t}(s+L) = \bar{t}(s) \Rightarrow n(s+L) = n(s)$

$\Rightarrow k(s+L) = k(s)$. Η $k|_{[0,L]}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο $\xRightarrow{\text{Fermat}}$ Έχει δυο τουλάχιστον κορυφές.

Έστω $s_0=0$ και t_1



Έστω ℓ η ευθεία που ορίζουν. τέμνει την c σε ένα τρίτο σημείο. Τότε λόγω λήμματος έχει άπειρες κορυφές.

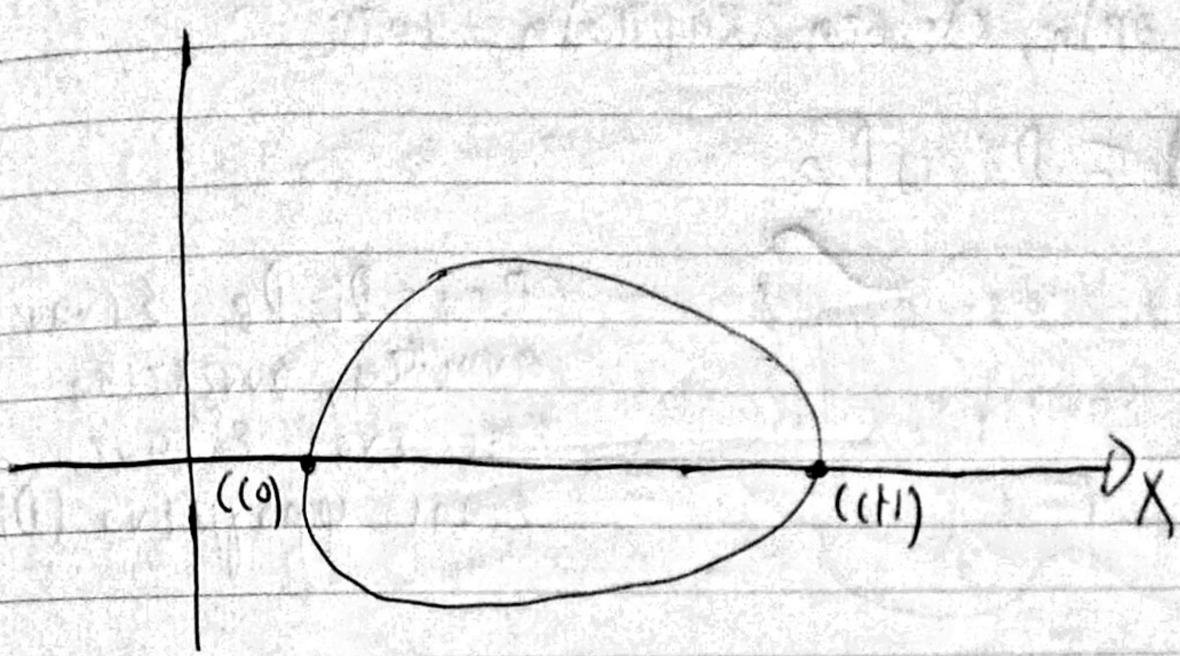
Υποθέτω τότε ότι η ℓ δεν έχει άλλο με την c.

Ισχυρισμός: στο $(0,t_1)$ ή στο (t_1,L) η c έχει κορυφή. Υποθέτω ότι στο $(0,t_1) \cup (t_1,L)$ δεν υπάρχει άλλη κορυφή.

$$\int_0^L \dot{k}(s)\,ds = k(L)-k(0) = 0 \text{ (λόγω περιοδικότητας)}$$

$\Longrightarrow$ η $\dot{k}$ έχει αντίθετο πρόσημο στα διαστήματα $(0,t_1)$, (t_1,L). Γιατί εφόσον δεν υπάρχουν κορυφές δε μηδενίζεται. Άρα είτε είναι αλλάζει πρόσημο απ' το ένα διάστημα στο άλλο είτε δεν αλλάζει. Το να μην αλλάζει όμως είναι άτοπο αφού τότε το ολοκλήρωμα δε θα μπορούσε να είναι 0. Άρα $\dot{k}$ έχει αντίθετο πρόσημο στα $(0,t_1)$ και (t_1,L)

Υποθέτω (μέσω γεωμετρικής ισοτιμίας) ότι



$c(s) = (x(s), y(s))$ $\quad | \int_0^L \dot{n}(s)\,ds = n(L) - n(0) = 0$

Όμως $\dot{n} = -\kappa t$

Άρα $\int_0^L \kappa t \, ds = 0$

$\Rightarrow \int_0^L \kappa \dot{c}\, ds \Leftrightarrow \kappa(s) c(s) \Big|_0^L - \int_0^L \dot{\kappa}(s) c(s)\, ds = 0$

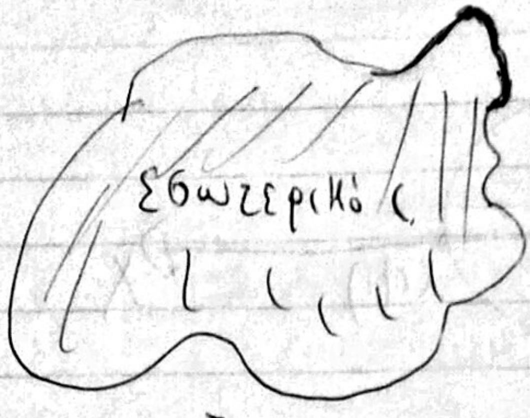
$\underrightarrow{\text{περιοδικότητα}}$ $\int_0^L \dot{\kappa}(s)\, c(s)\, ds = 0 \Rightarrow \int_0^L \dot{\kappa}(s)\,(x(s), y(s))\,ds = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^L \dot{\kappa}(s)\, x(s)\, ds = 0 \\ \wedge \\ \int_0^L \dot{\kappa}(s)\, y(s)\, ds = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} \dot{\kappa}(s) y(s)\, ds + \int_{t_1}^L \dot{\kappa}(s)\, y(s)\, ds = 0 \end{cases}$$

Θεώρημα (Jordan).

Έστω C απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε

$$\mathbb{R}^2 \setminus C(\mathbb{R}) = D_i \cup D_e$$



εξωτερικό C

όπου D_i, D_e είναι ανοικτά, συνεκτικά και ένα εξ αυτών είναι φραγμένο (D_i)

Θεώρημα: Έστω V λείο διανυσματικό πεδίο στο D_i

με $V(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, C κανονική καμπύλη, απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη

Τότε ισχύει $\displaystyle\iint_{D_i} \operatorname{div} V \, dx\,dy = -\oint_C \langle V, \bar{\eta} \rangle \, ds$

εμβαδό (D_i) $= \displaystyle\iint_{D_i} 1 \, dx\,dy$

Θεωρώ το διανυσματικό πεδίο V με $V(x,y) = (x,y)$

$\operatorname{div} V = 2$. Τότε $2 \cdot \iint_{D_i} 1 \, dx\, dy = -\oint_C \langle V, \bar{n} \rangle ds$

$\Longleftrightarrow$ 2 εμβαδόν $(D_i) = -\int_C \langle V, \bar{n} \rangle ds$. Τότε $c(s) = (x(s), y(s))$ με περίοδο L. Μένει να υπολογιστεί το

$$\oint_C \langle V, \bar{n} \rangle ds = \int_0^L \langle x(s), y(s) \rangle \cdot (-\dot{y}(s), \dot{x}(s)) \, ds$$

$$= \int_0^L -\dot{y}(s)\, x(s) + \dot{x}(s)\, y(s) \, ds$$

$$\text{Εμβαδόν } (D_i) = -\frac{1}{2} \int_0^L \dot{x}(s)\, y(s) - \dot{y}(s)\, x(s) \, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \dot{y}(s)\, x(s) - \dot{x}(s)\, y(s) \, ds$$

Παρατηρώ ότι $\int_0^L \dot{y}(s)\, x(s) \, ds \underset{}{\overset{\text{παραγοντική}}{=\!=\!=}} x(s)\, y(s) \Big|_0^L - \int_0^L \dot{y}(s)\, x(s) \, ds$

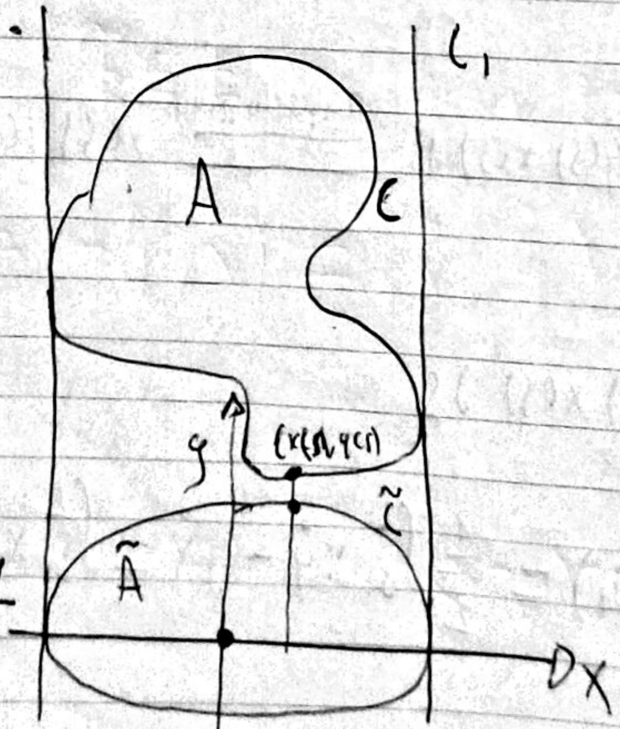
$\underset{}{\overset{\text{περιοδικότητα}}{=\!=\!=}} -\int_0^L \dot{y}(s)\, x(s) \, ds$

Τελικά εμβαδόν $(D_i) = \frac{1}{2} \int_0^L x\dot{y} - y\dot{x} = \int_0^L x\dot{y} = -\int_0^L y\dot{x}$

<u>Πρόβλημα</u>: Από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες με μήκος L ποια είναι η καμπύλη της οποίας το εμβαδόν του εσωτερικού της γίνεται μέγιστο;

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε απλή κλειστή καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ μήκους L το εμβαδόν A του εσωτερικού της πληρεί την ανισότητα $L^2 \geq 4\pi A$. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει μόνο αν η c είναι κύκλος

Απόδειξη:



A $c(s) = (x(s), y(s))$, $\tilde{c} = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (x(s), \tilde{y}(s))$

Υποθέτω ότι $\tilde{x}(s) = x(s)$

Αν $A, \tilde{A}$ τα αντίστοιχα εμβαδά

$$A = \int_0^L x\dot{y} \quad (1), \quad \tilde{A} = \pi r^2 = -\int_0^L \tilde{y}\cdot\dot{x} \quad (2)$$

(1) + (2) $$A + \tilde{A} = \int_0^L (x\dot{y} - \tilde{y}\dot{x})\, ds$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \int_0^L \sqrt{(x^2+\tilde{y}^2)}\cdot \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, ds$$

$$= r\int_0^L \|c'(s)\|\, ds = rL$$

Τότε $A + \pi r^2 \leq rL$. Όμως $2\sqrt{A\pi r^2} \leq A + \pi r^2$ (Ταυτότητα)

Άρα $2\sqrt{A\pi r^2} \leq rL \Rightarrow 4A\pi r^2 \leq r^2L^2$

$\Rightarrow L^2 \geq 4\pi A$

Έστω ότι $L^2 = 4\pi A$

Για να ισχύει η ισότητα θέλουμε τα διανύσματα $(x, \tilde{y})$ και $(y', -x')$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Άρα $(x, \tilde{y}) = \mu (y', -x') \iff x = \mu y'$
$\tilde{y} = -\mu x'$

Όμως $x y' - \tilde{y} x' = r$. Με αντικατάσταση $\mu = \pm r$. Έστω $\mu = -r$ Τότε ισχύει ότι

$$-\frac{1}{r}(x, \tilde{y}) = (\dot{y}, -\dot{x}) \Rightarrow \bar{n} = \tilde{n}$$

Άρα, το $\tilde{t} = t$ Όμως $t = (\dot{x}, \dot{y})$

$$\tilde{t} = \frac{1}{r}(-\tilde{y}, \tilde{x}) = (\dot{x}, \dot{\tilde{y}})$$

Τότε όμω $y = \tilde{y} + a$, a σταθερά

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y-a)^2 = r^2$$